Zbirka nalog za srednje šole: MATEMATIKA

O. Arnuš, V. Batagelj, A. Blaznik, B. Roblek, M. Strnad

POLINOMI. RACIONALNE FUNKCIJE. KRIVULJE II. REDA

Poglavje I. POLINOMI

Str. 16, naloga 75: Poišči samo racionalne korene enačb

<table>
<tr><th>Naloga</th><th>Obrazložitev:</th></tr>
<tr>
<td>
a) $x^3+3x^2-x-3=0$
Reši enačbo in izpiši racionalne ničle

Reševanja se lotim z 1) razcepom. (To ne gre vedno, vendar tu vidim, da sta po dva in dva koeficienta enaka).

$x^3+3x^2-x-3=0$
I______I I_____I
$x^2(x+3)-(x+3)=0$
$(x+3)(x^2-1)=0$
$(x+3)(x-1)(x+1)=0$
<table>
<tr><td>$x+3=0$
$x_1=-3$
$-3\in\mathbb{Q}$</td><td>$x-1=0$
$x_2=1$
$1\in\mathbb{Q}$</td><td>$x+1=0$
$x_3=-1$
$-1\in\mathbb{Q}$</td></tr>
</table>

Vse rešitve (koreni) so racionalna števila. Rešitve lahko zapišem tudi v naslednji obliki (kot množico rešitev):

$\Re=\{-3, 1, -1\}$
</td>
<td>
Rešiti je treba polinomsko enačbo. To lahko naredim:
1) z razcepom na linearne faktorje
ali pa po
2) Hornerju
koren enačbe pomeni isto kot rešitev enačbe.
Naša enačba ima tri rešitve, ki so lahko
- vse realne ($3\mathbb{R}$ in $0\ \mathbb{C}$)
- 1 realna in dve kompleksni ($1\mathbb{R}$ in $2\mathbb{C}$)
Naloga pa zahteva, da iz teh izločim <u>racionalne rešitve</u>.

Ponovimo, katere so so si podrejene številske množice:
$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$
Tu so:
$\mathbb{N}$ - naravna števila $\mathbb{Z}$ - cela števila
$\mathbb{Q}$- racionalna števila $\mathbb{R}$ -realna števila
$\mathbb{C}$- kompleksna števila
Racionalne ničle so vse do $\mathbb{Q}$, t.j. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$
</td>
</tr>
</table>

b) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 15x^2 - 36x + 20 = 0$

reši enačbo in izpiši racionalne ničle

Nalogo se lotim po 2) s Hornerjem

Izpišem koeficiente (enačba 5 stopnje jih mora imeti 6)

	1	-5	5	15	-36	20
1	↓	1	-4	1	16	-20
	1	-4	1	16	-20	0
2	↓	2	-4	-6	20	
	1	-2	-3	10	0	
3	↓	3	3	0		
	1	1	0	10		

	1	-2	-3	10	0
4	↓	4	8	20	
	1	2	5	30	

	1	-2	-3	10	
5	↓	5	15	60	
	1	3	12	70	

Poiščem vse delitelje konstantnega člena 20.

$D_{20} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20\}$

To so kandidati za cele rešitve naše enačbe. Začnem z **1**. Prvi koeficient 1 vedno prepišem. Množim **1** . **1** =1 in podpišem pod drugi koeficient. Seštejem in postopek ponavljam do konca. Če dobim na koncu **0** (kar se mi je zgodilo), da sem dobil **1** za rešitev enačbe: $x_1 = 1$

Sedaj iz te »vrste«, ki je praktično enačba 4. stopnje spet iščem rešitve, tako, da da vstavim enega od kandidatov. Recimo, da vzamem **2.** Imam srečo, da dobim ponovno **0**. Tako imam že drugo rešitev $x_2 = 2$.

Poiskati moram še tri rešitve oz. Vsaj eno s Hornerjem. Ostali dve pa lahko izračunam po kvadratni enačbi, ker na koncu dobim le še kvadratno enačbo.

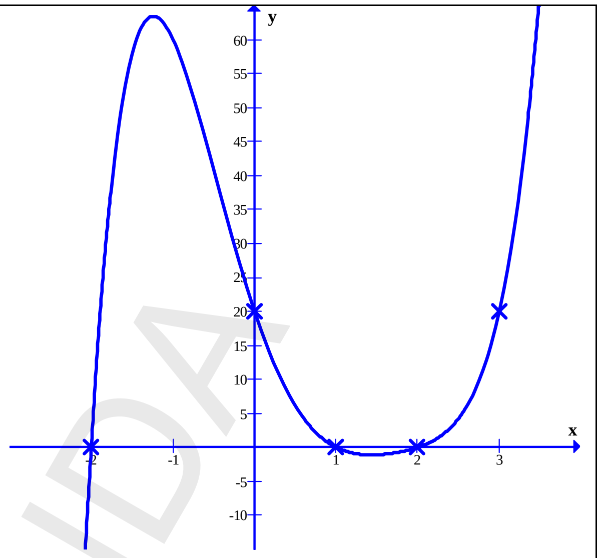
Poiščem še vrednost v x=3 iz originalnih koeficientov. Postopek ponovim. Prvi koeficient vedno prepišem. Sedaj pa na koncu ostanek ni 0, ampak 10. To pomeni, da ima na pripadajočem grafu k enačbi polinom v x=3 vrednost 10, t.j. graf gre skozi točko T(3,10).

Z novim kandidatom ponovim postopek iz vrste, kjer je na koncu 0. Še enkrat izpišem koeficiente in vzamem kandidata **4**.

Ostanek ni nič, torej 4 ni rešitev enačbe.

Tudi 5 ni rešitev enačbe, ker ostanek ni nič.

Naredim si tudi skico, kako bi zgledal pripadajoči polinom. Rešitve enačbe so ničle polinoma.



	1	-2	-3	10	
-1	↓	-1	3	0	
	1	-3	0	10	

	1	-2	-3	10	
-2	↓	-2	8	-10	
	1	-4	5	0	

Pogledam še, kako le v negativnih kandidatih, recimo pri **-1**.

Ker je ostanek 10, tudi -1 ni rešitev.

Vzamem še **-2**. Tokrat je ostanek enak **0,** zato je to tretja rešitev enačbe. Sedaj mi ostanejo samo še trije koeficienti, iz katerih napišem kvadratno enačbo.

$x^2 - 4x + 5 = 0$

Razcep po Viètu ne gre, zato zračunam diskriminanto:

$D = b^2 - 4ac = -4 < 0$

Ker je D negativna, vem, da sta rešitvi kompleksni. Naloga pa od mene zahteva le racionalne rešitve. Te pa so:

$\Re = \{1, 2, -2\}$