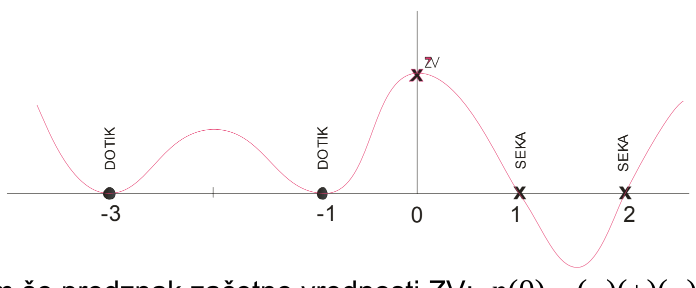
Poglavje II. RACIONALNE FUNKCIJE; ENAČBE IN NEENAČBE, str.31

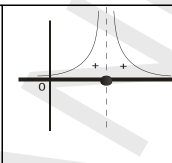
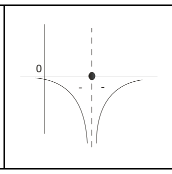
Naloga11d: Določi ničle, pole, asimptote in načrtaj približen graf funkcije $f(x)=\frac{2x^2+x}{x-1}$

Rešitev	**Razlaga**
$f(x)=\frac{2x^2+x}{x-1}$ Približen graf	Narisati je treba graf racionalne funkcije. DEF.: Racionalna funkcija je vsak okrajšan kvocient dveh polinomov p(x) in q(x): $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ Standardni koraki za risanje racionalne funkcije so:
N: $2x^2+x=0$ $x(2x+1)=0$ $x_1=0$ (x) – liha ničla $2x+1=0$ $x_2=-\frac{1}{2}$ (x) - liha ničla	**Ničle(N):** - Poiščem ničle funkcije: $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=0$, torej je $p(x)=0$ - V ničlah lihe stopnje (na grafu jih označujemo kot križec -x) graf seka x os, oz. rečemo, da funkcija spremeni predznak. Ničle prve stopnje se imenujejo tudi enostavne ničle. - V sodih ničlah (na grafu jih označujemo s piko) pa se graf dotakne x os, oz. funkcija ne spremeni predznaka. Primer: $p(x)=(x-1)(x+1)^2(x-2)^3(x+3)^4$ $x_1=1$ liha ničla (križec) $x_{2,3}=-1$ soda ničla (pika) $x_{4,5,6}=2$ liha ničla (križec) $x_{7,8,9,10}=-3$ soda ničla (pika)  Določim še predznak začetne vrednosti ZV: $p(0)=(-)(+)(-)(+)>0$ Vidim, da je pozitivna in križec na y osi mi že pomaga določiti graf p(x).

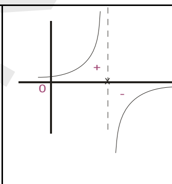
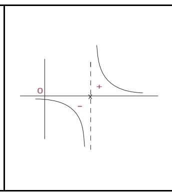
P: x-1 = 0

x = 1   (x) - lihi pol

Poli (P):
Poiščem pole racionalne funkcije iz enačbe, ko je imenovalec funkcije enak 0: → q(x)=0
DEF.: Poli so točke na x osi, pri katerih funkcija ni definirana. Graf nikoli ne poteka skozi pol. V polu je VEDNO navpična asimptota. DEF.: Navpična asimptota je premica v polu (rišem jo črtkano), katere se graf nikoli ne dotakne. Navpična asimptota ima enako enačbo kot pol.
Tudi poli so lahko lihe ali sode stopnje. V sodem polu (označim ga s točko) funkcija ohrani predznak oz. veji grafa »prihajata« iz leve in desne strani ob asimptoti v polu. Tu sta dve možnosti v odvisnosti od pozitivnega ali negativnega predznaka funkcije:

$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$		ali		$f(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$

V lihem polu funkcija spremeni predznak in veji grafa »prihajata« iz različnih strani ob navpični asimptoti v polu. Spet sta dve možnost:

$f(x)=\frac{1}{x-1}$		ali		$f(x)=-\frac{1}{x-1}$

A: Določimo poševno asimptoto
DEF.: Poševna asimptota je krivulja (premica, parabola,...), kateri se graf poljubno približa, vendar se je ne dotakne razen v posebnih primerih.
Imenujmo **st** stopnjo, ki je enaka največjemu eksponentu spremenljivke x.
Tu so tri možnosti:

(a) st(p) < st(q)   Tedaj je poševna asimptota <u>vedno</u> x os oz. y=0

Glej nalogo 6b!

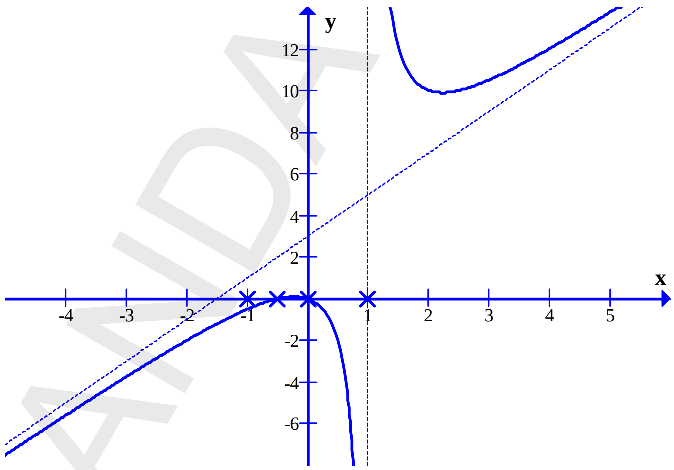
(b) st(p) = st(q)   Poševna asimptota je vedno kvocient <u>vodilnih koeficientov</u> polinoma v števcu in polinoma v imenovalcu. To je vedno vzporednica z x osjo. V splošnem graf ne seka poševne asimptote.
DEF.: <u>Vodilni koeficient</u> polinoma $p(x)=a_n x^n+...+a_0$ je realni koeficient a_n, tj. koeficient zraven x-a z najvišjim eksponentom.

Tu je treba vedno računsko preveriti, če graf seka to asimptoto. Izenačim:

$f(x)=\frac{a_n}{b_n}$

	Rešitve te enačbe so x–i, pri katerih se graf in poševna asimptota sekata. Glej nalogo 10č) istega poglavja.
A: $(2x^2+x):(x-1)=2x+3$ $2x^2-2x$ I-1 $3x$ $-3x-3$ I-1 $o(x)=3$ Tu ostanek ni odvisen od x-a, torej se graf in poševna asimptota $y=2x+3$ ne sekata. Zapišimo ta kvocient še takole: $(p(x):q(x)=k(x)+\frac{o(x)}{q(x)})$ $(2x^2+x):(x-1)=$ $2x+3+\frac{3}{x-1}$	**(c)** st(p) > st(q) Polinoma v števcu in imenovalcu racionalne funkcije moramo vedno med seboj deliti: $p(x):q(x)=k(x)+\frac{o(x)}{q(x)}$ Asimptota je $y=k(x)$, ostanek o(x) pa izenačimo z 0. Rešitve enačbe pa nam dajo x-e od presečišča grafa in poševne asimptote. Kadar o(x) ni odvisen od x-a, graf <u>NE</u> seka poševne asimptote.
ZV: $f(0)=\frac{2.0+0}{0+1}=\frac{0}{-1}=0$ $P_y(0,0)$ S to začetno vrednostjo, ki je enaka ničli funkcije, sit u ne bomo mogli pomagati pri risanju funkcije. Zato si bomo morali tu izbrati še neko točko $T(x_0,y_o)$ na grafu. Ponavadi si to točko izberemo šele, ko narišemo graf. Le tako si izberem najprimernejšo točko. Za x_0 sin e smem izbrati niti pol niti ničle.	**Začetna vrednost (ZV)** Izračunamo začetno vrednost funkcije (v njej graf seka y os). $f(0)=\frac{p(0)}{q(0)}$ Začetna vrednost nam pomaga pri risanju grafa. Lahko se zgodi, da funkcija nima začetne vrednosti. To sta primera, ko ima funkcija pol ali ničlo ravno v x = 0. V teh dveh primerih si z ZV ne moremo pomagati pri risanju grafa. Tedaj moramo poiskati neko drugo točko T, ki leži na grafu $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, to je $T(x_0,\frac{p(x_0)}{q(x_0)})$.

Narišemo graf racionalne funkcije ob upoštevanju vsega, kar smo dobili po izračunih.

<table>
<tr><th>Izračuni</th><th>Komentar</th><th>GRAF</th></tr>
<tr><td>N: $x_1 = 0$ (x)
$x_2 = -\frac{1}{2}$ (x)</td><td></td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>P: $x = 1$ (x)</td><td></td></tr>
<tr><td>A: y = 2x +3

Tabeliramo:
x | y
0 | 3
-1 | 1</td><td>Graf seka asimptoto, ki je v našem primeru premica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ZV: f(0) = 0 $P_y(0,0)$
S to ZV si ne moremo pomagati pri risanju.

Vidim, da sploh ne potrebujem dodatne točke, če vem, da v lihem polu funkcija spremeni predznak. Torej graf skoči v zgornji del desne polravnine. Če pa nas vseeno zanima, kakšno vrednost doseže funkcija v x = 2, pa izračunam točko T v x = 2 in to upoštevam pri risanju. Ni pa nujno, da je pri x = 2 minimum. S tem se bomo ukvarjali kasneje .

$T(2, f(2) = \frac{2.2^2 + 2}{2-1} = 10)$</td><td>Navpična os x = 1 nam razdeli ravnino na dve polravnini, poševna asimptota pa še vsako od teh polravnin na dva dela. Risati začnem na tisti polravnini, kjer imam več križcev ali pik. Pri nas je to spodnji del leve polravnine.</td></tr>
</table>