

M. Hribar, S. Kocjančič, A. Likar, S. Oblak, B. Pajk, V. Peruna, N. Razpet, B. Roblek, F. Tomažič, M. Tramuš:

### Fizika za 3. in 4. letnik srednjih šol

Založba Modrijan, Ljubljana 2005

Električni tok in naboj

Stran 50, naloga 26

V narisanim vezju ima prva baterija gonilno napetost 2 V in notranji upor 1  $\Omega$ , druga baterija pa gonilno napetost 4 V in notranji upor 2  $\Omega$ . Kolišen je tok po uporniku za 5  $\Omega$ ?

$$U_1 = 2V$$

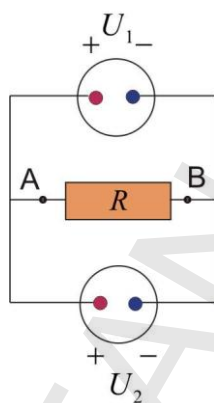
$$R_{n1} = 1\Omega$$

$$U_2 = 4V$$

$$R_{n2} = 2\Omega$$

$$R = 5\Omega$$

$$I_R = ?$$



Razlaga:

Nalogo rešimo na 4 načine.

1. Rešitev sistema enačb napetosti v sklenjenih zankah in tokov v vozlišču

Napišemo tri enačbe - dve napetostni enačbi za dve sklenjeni zanki in tokovno enačbo za vozlišče ter izračunamo napetosti in tokove. Na shemi označimo smer opazovanja napetosti s puščico in označimo vse napetosti v smeri puščice kot pozitivne in v obratni smeri za negativne. Upoštevamo, da je vsota napetosti znotraj sklenjene zanke enaka nič ( $\sum U = 0$ ). Prav tako označimo na shemi tudi smeri tokov v vozlišču. Dogovorimo se, da so pritekajoči tokovi pozitivni in odtekajoči tokovi negativni. Vsota tokov v vozlišču je enaka nič ( $\sum I = 0$ ).

2. Metoda superpozicije

Ločeno izračunamo tok skozi upor  $R$ , ki ga povzroča napetostni izvir  $U_1$  (pri tem si mislimo, da je namesto  $U_2$  kratek stik) in tok, ki ga povzroča napetostni izvir  $U_2$  (pri tem si mislimo, da je namesto  $U_1$  kratek stik). Oba toka nato seštejemo.

3. Po Theveninu. Za podano nalogo je to najhitrejša metoda.
4. Metoda zanjnih tokov. Nastavimo zanjne tokove in izračunamo vejni tok  $I_R$ .

Rešitev:

Prvi način:

Nastavimo tri enačbe: vsota tokov v vozlišču je enaka nič in vsota napetosti v dveh izbranih sklenjenih zankah je enaka nič.

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_R &= 0 \\ U_1 - U_R - U_{n1} &= 0 \\ \underline{U_2 - U_R - U_{n2} &= 0} \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo  $I_2$ :

$$I_2 = I_R - I_1$$

Napetosti na uporih v drugi in tretji enačbi izrazimo s tokovi in upornostmi po Ohmovem zakonu:

$$U_{n1} = I_1 R_{n1}$$

$$U_{n2} = I_2 R_{n2}$$

$$U_R = I_R R$$

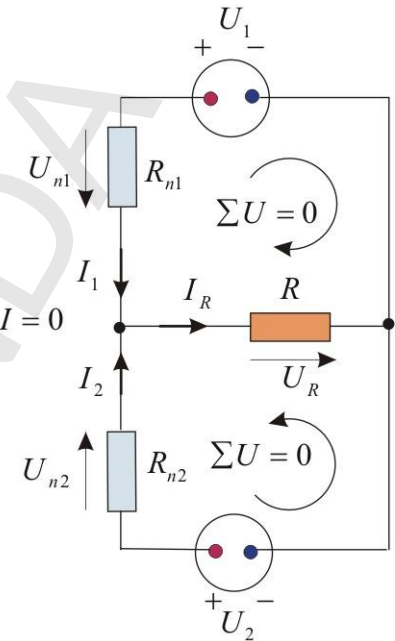
Vstavimo v sistem enačb in ga preoblikujemo:

$$\begin{aligned} U_1 &= I_1 R_{n1} + I_R R \\ U_2 &= (I_R - I_1) R_{n2} + I_R R = -I_1 R_{n2} + I_R (R + R_{n2}) \end{aligned}$$

Vstavimo podatke:

$$\begin{aligned} 2V &= I_1 \cdot 1\Omega + 5\Omega \cdot I_R / .2 \\ 4V &= -I_1 \cdot 2\Omega + (5 + 2)\Omega \cdot I_R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4V &= 2I_1 \cdot 1\Omega + 10\Omega \cdot I_R \\ \underline{4V &= -I_1 \cdot 2\Omega + 7\Omega \cdot I_R} \end{aligned}$$



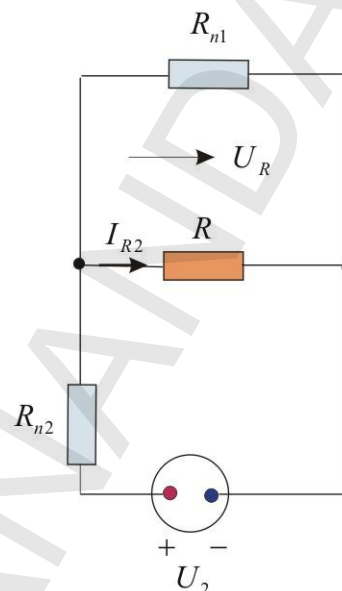
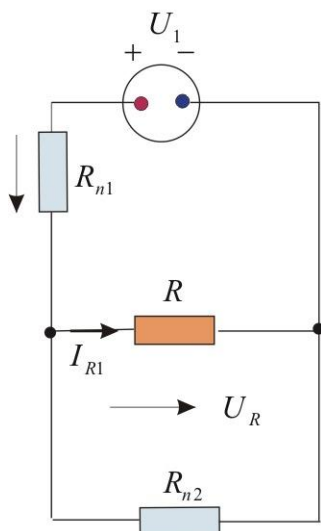
Slika 1

Rešitev:

$$I_R = \frac{18V}{17\Omega} = 0,47 A$$

**Drugi način: superpozicija tokov na upor  $R$ .**

Najprej računamo, kot da je v vezju samo baterija z napetostjo  $U_1$ , medtem ko  $U_2$  po sliki 1 nadomestimo s kratkim stikom. Izračunamo tok skozi upor  $R$  in ga označimo z  $I_{R1}$ . Postopek ponovimo za drugo baterijo. Dobimo  $I_{R2}$ . Tok skozi upor  $R$  dobimo kot vsoto tokov  $I_{R1}$  in  $I_{R2}$ .



$$I_{R1} = \frac{U_R}{R}$$

$$I_{R2} = \frac{U_R}{R}$$

$$U_R = I \cdot R // R_{n2} = \frac{U_1}{R_{n1} + R // R_{n2}} R // R_{n2}$$

$$U_R = I \cdot R // R_{n1} = \frac{U_2}{R_{n2} + R // R_{n1}} R // R_{n1}$$

Pri tem je :  $R // R_{n2}$  paralelna vezava upornosti  $R$  in  $R_{n2}$ :

Pri tem je:

$$R // R_{n2} = \frac{R \cdot R_{n2}}{R + R_{n2}} = \frac{5\Omega \cdot 2\Omega}{5\Omega + 2\Omega} = 1,43\Omega$$

$$R // R_{n1} = \frac{R \cdot R_{n1}}{R + R_{n1}} = \frac{5\Omega \cdot 1\Omega}{5\Omega + 1\Omega} = 0,833\Omega$$

$$U_R = \frac{2V}{1\Omega + 1,43\Omega} \cdot 1,43\Omega = 1,18V$$

$$U_R = \frac{4V}{2\Omega + 0,833\Omega} \cdot 0,833\Omega = 1,18V$$

$$I_{R1} = \frac{1,18V}{5\Omega} = 0,236A$$

$$I_{R2} = \frac{1,18V}{5\Omega} = 0,236A$$

$$I_R = I_{R1} + I_{R2} = 0,236A + 0,236A = 0,47A$$

### Tretji način: s pomočjo Theveninovega teorema.

Poiščemo Theveninovo nadomestno vezje: napetost odprtih sponk A-B na mestu upora R (ki ga odstranimo iz vezja) in notranjo upornost  $R_n$  na sponkah A-B, kjer napetostna generatorja nodomestimo s kratkim stikom.

Najprej izračunamo napetost na odprtih sponkah A-B:

$$I = \frac{U_2 - U_1}{R_{n1} + R_{n2}} = \frac{2V}{3\Omega} = 0,666A$$

$$U_{Rn2} = I \cdot R_{n2} = 1,333V$$

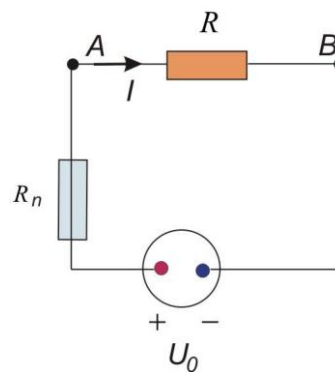
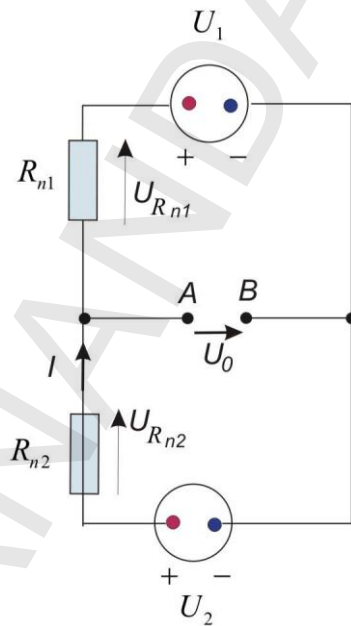
$$U_0 = U_2 - U_{Rn2} = 2,6667V$$

Izračunamo še upornost na sponkah A-B; napetostna izvora sta kratko sklenjena.

$$R_n = \frac{R_{n1} \cdot R_{n2}}{R_{n1} + R_{n2}} = 0,667\Omega$$

Sedaj lahko preprosto dobimo tok skozi upor R:

$$I = \frac{U_0}{R_n + R} = 0,47A$$



Četrty način: metoda zračnih tokov:

Imamo dva zračna toka  $I_A$  in  $I_B$  in tri vejne tokove:  $I_1, I_2$  in  $I_R$ .

$$I_A = I_1, \quad I_B = I_2, \quad I_R = I_A + I_B$$

Nastavimo enačbi za dve zanki:

$$+I_A (R_{n1} + R) + I_B R - U_1 = 0$$

$$+I_B (R_{n2} + R) + I_A R - U_2 = 0$$

Nastavimo enačbi za  $I_A$  in  $I_B$

$$6 I_A + 5 I_B = 2$$

$$5 I_A + 7 I_B = 4$$

in izračunamo:

$$I_B = 0,823 \text{ A}$$

$$I_A = -0,353 \text{ A}$$

Dobimo rezultat:

$$I_R = I_A + I_B = 0,47 \text{ A}$$

