

Poglavje I. POLINOMI

8. Odvod polinoma in tangenta na graf

Str.20, naloga 101 a), č), e), g)

Naloga 101 Določi intervale, na katerih funkcija raste, in intervale, na katerih funkcija pada.

101 a) $p(x) = 2x^2 + 4x - 3$

č) $p(x) = x^3 - 12x + 5$

e) $p(x) = -2x^3 + 5x^2 + 4x + 7$

g) $p(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

TEORIJA

Def.: Funkcija $f(x)$ je **rastoča** $\Leftrightarrow x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$$\Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

\Leftrightarrow za x-e, nad katerim gledam njen graf od leve proti desni navzgor

$$(*) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \text{ (ko je njen prvi odvod pozitiven)}$$

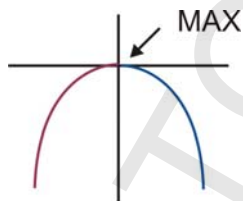
Def.: funkcija $f(x)$ je **padajoča** $\Leftrightarrow x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$$\Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

\Leftrightarrow za x-e, nad katerim gledam njen graf od **leve** proti desni **navzdol**

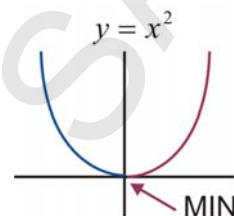
$$(**) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \text{ (ko je njen prvi odvod negativen)}$$

Naraščanje (**padanje**) preide v **padanje** (**naraščanje**) v ekstremih.



$$y = -x^2$$

V maksimumu preide funkcija iz **naraščanja** v **padanje**. Graf gledam od leve proti desni navzgor do maksimuma v izhodišču, kjer potem gledam graf of leve proti desni navzdol. Torej je funkcija padajoča.



$$y = x^2$$

V minimumu funkcija preide iz **padanja** v **naraščanje**.

Mi bomo reševali nalogo z odvodom. Seveda je v ta namen potrebno znati izračunati odvod polinoma.

101 a) $p(x) = 2x^2 + 4x - 3$

$p(x)$ raste?

$p(x)$ pada?

Izračunam odvod: $p'(x) = 4x + 4$

Po (*) $p(x)$ raste $\Leftrightarrow p'(x) > 0$

$$4x + 4 > 0$$

$$4x > -4$$

$$\underline{x > -1}$$

Po (**) $p(x)$ pada $\Leftrightarrow p'(x) < 0$

$$4x + 4 < 0$$

$$4x < -4$$

$$\underline{x < -1}$$

Spomnimo se, da je odvod funkcije

$$f(x) = x^n$$

$$\text{enak } f'(x) = nx^{n-1}.$$

Torej polinom $p(x)$ raste na intervalu:

$$x \in (-1, \infty).$$

Polinom pada za $x \in (-\infty, -1)$.

101 č) $p(x) = x^3 - 12x + 5$

$p(x)$ raste?

$p(x)$ pada?

Odvod: $p'(x) = 3x^2 - 12$

Po (*) $p(x)$ raste $\Leftrightarrow p'(x) > 0$

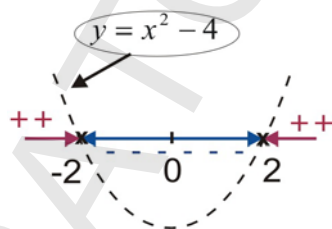
$$3x^2 - 12 > 0 / : 3$$

$$x^2 - 4 > 0$$

$$(x-2)(x+2) > 0$$

Rešim kvadratno neenačbo.

Glej naloge iz kvadratne neenačbe!



Ker je na označenih intervalih $(-\infty, -2)$ in $(2, \infty)$ prvi odvod polinoma pozitiven, to pomeni, da je na teh istih dveh intervalih polinom rastoča funkcija. Torej je rešitev:

$$x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty).$$

Vidim, da je iz reševanja kvadratne neenačbe razvidno tudi, kje je prvi odvod negativen. Na tem intervalu je prvotni polinom padajoč. Torej pada za $x \in (-2, 2)$.

101. e) $p(x) = -2x^3 + 5x^2 + 4x + 7$

$p(x)$ raste?

$p(x)$ pada?

Odvod: $p'(x) = -6x^2 + 10x + 4$

$p(x)$ raste $\Leftrightarrow p'(x) > 0$

$-6x^2 + 10x + 4 > 0 / (-1)$

$6x^2 - 10x - 4 < 0 / : 2$

$3x^2 - 5x - 2 < 0$

$3(x-2)(x+\frac{1}{3}) < 0 / : 3$

$(x-2)(x+\frac{1}{3}) < 0$

Glej reševanje kvadratnih neenačb!

$D = b^2 - 4ac$

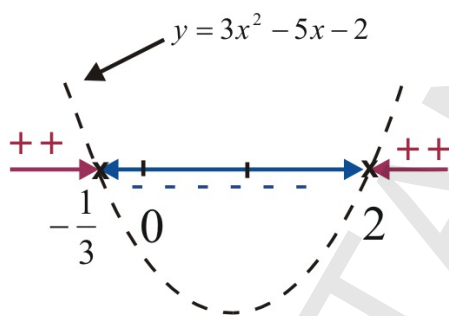
$D = 25 + 24 = 49$

$\sqrt{D} = 7$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{6}$

$x_1 = \frac{12}{6} = 2$

$x_2 = -\frac{1}{3}$



Odčitam rezultat: $p(x)$ raste: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (2, \infty)$

$p(x)$ pada: $x \in \left(-\frac{1}{3}, 2\right)$

101. g) $p(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

$p(x)$ raste?

$p(x)$ pada?

Odvod: $p'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$p(x)$ raste $\Leftrightarrow p'(x) > 0$

$$12x^3 - 12x^2 - 24x > 0 / :12$$

$$x^3 - x^2 - 2x > 0$$

$$x(x^2 - x - 2) > 0$$

$$x(x-2)(x+1) > 0$$

Izpišem ničle pripadajoče funkcije prvega odvoda:

$$p'(x) = x(x-2)(x+1)$$

$x_1 = 0$ (x) Vse so lihe stopnje,
 $x_2 = 2$ (x) zato se v vseh
 $x_3 = -1$ (x) spremeni preznak.

To je neenačba višje stopnje. Tu je treba vedeti, kdaj so ničle lihe oz. sode stopnje.

Ničle(N):

Imamo ničle sode in lihe stopnje.

- **V ničlah lihe stopnje** (na grafu jih označujemo kot križec) graf seka x os, oz. rečemo, da funkcija spremeni predznak. Ničle prve stopnje se imenujejo tudi enostavne ničle.

- **V sodih ničlah** (na grafu jih označujemo s piko) pa se graf dotakne x os, oz. funkcija ne spremeni predznaka.

Primer:

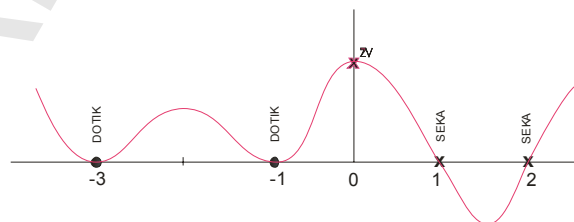
$$p(x) = (x-1)(x+1)^2(x-2)^3(x+3)^4$$

$x_1 = 1$ liha ničla (križec)

$x_{2,3} = -1$ soda ničla (pika)

$x_{4,5,6} = 2$ liha ničla (križec)

$x_{7,8,9,10} = -3$ soda ničla (pika)

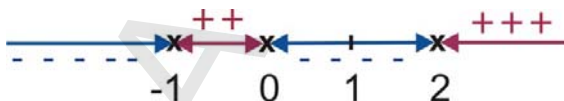


Določim še predznak začetne vrednosti ZV:

$$p(0) = (-)(+)(-)(+) > 0$$

Vidim, da je pozitivna in križec na y osi mi že pomaga določiti graf

Pomagam si z risanjem kot pri reševanju kvadratne neenačbe.



Najprej na enem izmed intervalov med ničlami ugotovim predznak. Vstavim recimo $x=1$ v $x(x-2)(x+1)$ in ugotovim, da je vrednost **negativna (-)** ($1 \cdot (1-2) \cdot (1+1) < 0$). Ker za $x=1$ prvotni polinom pada, **pada** na celem intervalu $(0, 2)$. Potem levo v 0 in desno v 2 spremeni predznak v + in tako naprej levo v -1 spet spremeni predznak v -. Torej na intervalih s + prvotni polinom **raste**, na intervalih z - pa **pada**.

Torej $p(x)$ raste za $x \in (-1, 0) \cup (2, \infty)$ in

$p(x)$ pada za $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2)$