BERNOULLIJEVA ENAČBA

KAZALO

1 UVOD

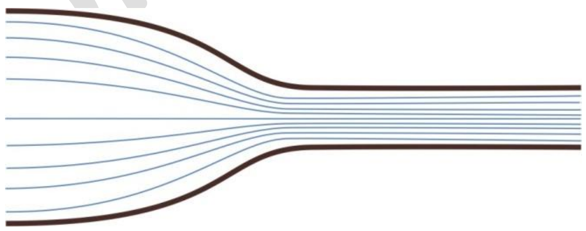
Hidromehanika je nauk o fizikalnih lastnostih vode (gr. hydor je voda) ali poljubnih gibajočih tekočin ter njihovega vpliva na telo. Mnoge zakonitosti iz hidromehanike lahko uporabimo tudi pri gibanju plina. Edini premislek, ki ga moramo upoštevati so možne napake, ki se pojavljajo zaradi stisljivosti plinov (stisljivost tekočin je minimalna).

Zakonitosti gibajočih tekočin so razmeroma preproste ob predpostavki, da se tekočina med gibanjem ne vrtinči. V tem primeru je možno izpeljati temeljne fizikalne zakonitosti. Zajema jih Bernoullijeva enačba in iz nje izpeljane veličine kot so zastojni tlak in sila upora tekočine.

Natančnost Bernoullijeve enačbe je odvisna tudi od viskoznosti tekočin, kar bomo pokazali na primeru.

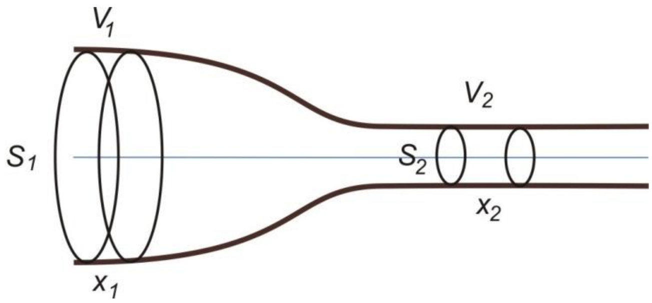
2 STACIONARNI LAMINARNI TOK

Tokovnice imenujmo tire gibanja posameznih molekul tekočine. Laminarni tok je tok, kjer tokovnice tečejo druga ob drugi; se ne vrtinčijo in se med seboj pri gibanju ne ovirajo. Pri turbulentnem toku prihaja do vrtinčenja tekočine, tokovnice se prepletajo in zavirajo gibanje tekočine. Predmet nadaljnjega proučevanja je laminarni tok.



Slika 1 Laminarni tok

V primeru laminarnega toka lahko smatramo,da povsod po cevi v istem času preteče ista količina (volumen V) tekočine.



Slika 2 Stacionaren tok

Stacionaren tok po sliki 2 je, ko je $V_1 = V_2$

Volumenski tok pove, kakšen volumen tekočine preteče po cevi v opazovanem času:

$$\Phi_v = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Podobno pove masni tok, kakšna masa tekočine preteče skozi cev v določenem času:

$$\Phi_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \Phi_V$$ ρ je gostota tekočine $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

Volumenski tok je na vseh mestih cevi enak:

$$\Phi_{V1} = \Phi_{V2}$$

$$\frac{S_1 x_1}{\Delta t} = \frac{S_2 x_2}{\Delta t}$$

$$\frac{S_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = \frac{S_2 v_2 \Delta t}{\Delta t}$$

$$\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2}$$

Pri laminarnem toku je torej produkt preseka cevi in hitrosti vzdolž toka vedno enak.

3 DELO TLAKA IN SPREMEMBA KINETIČNE ENERGIJE

Z batom pritiskamo na tekočina s silo F v širšem koncu cevi tako, da izrinemo tekočino za ΔV. Za enak volumen se premakne tekočina tudi v ožjem delu bata, saj je tok stacionaren.

Tlak, s katerim potiskamo na bat je:

$$p = \frac{F}{S} \quad \Rightarrow \quad F = p\,S$$

Delo tlaka izračunamo:

$$A_p = F\,x_1 = p\,S\,x_1 = p\,\Delta V$$

Če uporabimo izrek o kinetični energiji, dobimo:

$$A_p = \Delta W_k$$

Opomba: Pri izreku o kinetični energiji mislimo običajno na togo telo. Koliko velja tudi za tekočine in pline bomo ocenili v nadaljevanju.

Opomba: kinetična energija je energija, ki jo ima telo zaradi gibanja.

$$W_k = \frac{m\,v^2}{2}$$

Vidimo, da bi morala dobiti voda mase Δm, ki se nahaja v volumnu ΔV naslednjo kinetično energijo:

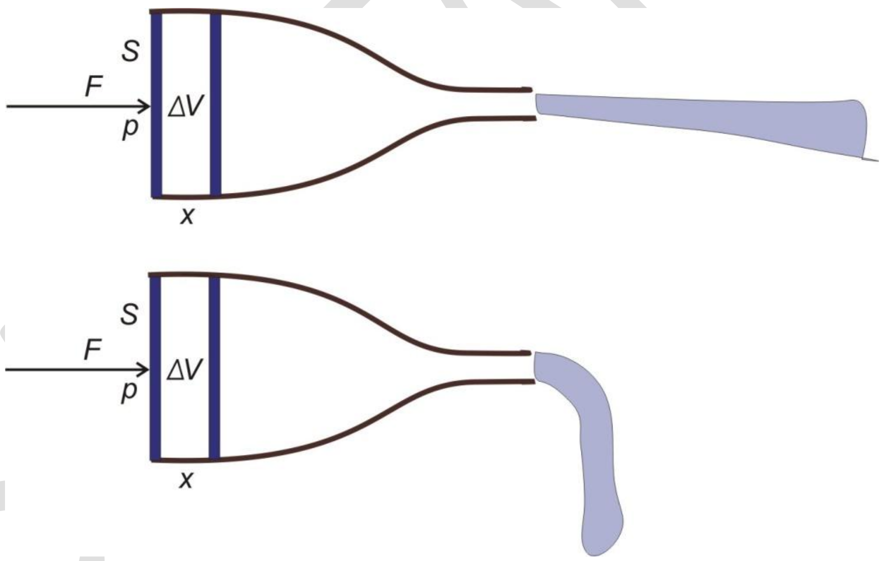
$$p\Delta V = \frac{\Delta m\,v^2}{2}$$

Ali, če delimo obe strani enačbe z ΔV:

$$\boxed{p = \frac{\rho\,v^2}{2}}$$

Izraz na desni se imenuje gostota kinetične energije (ρ je gostota snovi). Tlak na tekočino povzroči torej spremembo gostote kinetične energije.

Ali ta enačba velja v vseh primerih? To nam pokaže poskus. V cev z batom natočimo najprej vodo, nato pa olje. V primeru olja vidimo, da je iztekajoči curek bistveno bolj slaboten kot v primeru vode. Ker ima olje nižjo gostoto kot voda, bi morala biti hitrost curka po zgornji enačbi večja. Razlika je v sili trenja med molekulami obeh tekočin, to je v viskoznosti tekočin.



Slika 3 Kinetična energija iztekajočega curka je odvisna od dela tlaka in viskoznosti tekočin.

4 ENERGETSKA ENAČBA

Predpostavimo, da je cev po sliki 4 toplotno in mehansko izolirana od okolice. Prav tako predpostavimo, da je tok laminaren in stacionaren. Predpostavimo tudi, da je viskoznost tekočin zanemarljiva. Lahko bi sicer tudi proučili, za koliko se med gibanjem viskozne tekočine poveča toplotna energija in to upoštevali v energetski enačbi, vendar bi bil izračun prezapleten. Tekočina se torej ne vrtinči in ne tare med sabo in s steno cevi, kar bi povzročilo segrevanje tekočine.

V tem primeru velja zakon o ohranitvi energije.

Preden za naš primer zapišemo zakon o ohranitvi energije, definirajmo polno energijo sistema.

Polna energija sistema W je vsota kinetične energije, potencialne energije, notranje energije in drugih oblik energije:

$$\boxed{W = W_k + W_p + W_n + \cdots}$$

kjer je:

$W_k = \frac{mv^2}{2}$ kinetična energija (energija zaradi hitrosti)

$W_p = mgh$ potencialna energija (energija zaradi višine)

W_n notranja energija (termično gibanje molekul, medmolekularne sile, jedrske sile)

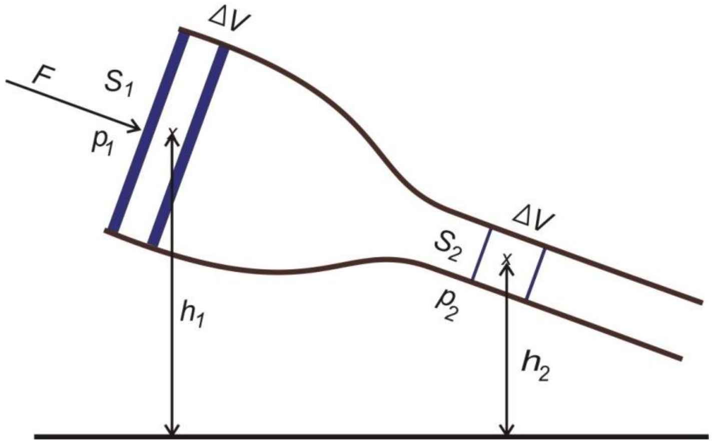
Prvi zakon termodinamike pravi, da je sprememba polne energije sistema enaka vsoti dovedene ali oddane toplote Q in dovedenega ali oddanega dela A.

$$\Delta W = Q + A$$

Polna energija se ohrani, če je vsota dela in toplote na desni strni enačbe enak nič. Ker ni trenja in je sistem toplotno izoliran od okolice lahko predpostavimo, da ni spremembe toplotne energije. Delo A je samo delo tlaka $p\,\Delta V$ in ga napišemo na levi strani enačbe. Sedaj napišemo zakon o ohranitvi energije v naslednji obliki:

$$\Delta W_k + \Delta W_p + \Delta W_n + \cdots + \Delta A_p = 0$$

Oglejmo si primer na sliki 4. Cev je nagnjena in ima dva različna preseka S_1 in S_2 Na zgornji strani je bat, na katerega pritiskamo s silo F in pri tem izpodrinemo tekočino za ΔV. V desnem spodnjem delu se voda premakne za enak ΔV. Ker je cev ožja, bo morala biti hitrost (kinetična energij) tekočine večja.



Slika 4 Nagnjena cev dveh različnih presekov

Za narisan sistem velja, da je sta vsota dela tlaka in polne energije na levem in desnem delu cevi enaki. Upoštevamo kinetično energijo, potencialno energijo, notranjo energijo in delo tlaka ter zapišemo:

$$W_{k1} + W_{p1} + W_{n1} + A_{p1} = W_{k2} + W_{p2} + W_{n2} + A_{p2}$$

$$\boxed{\frac{\Delta m\, v_1^2}{2} + \Delta mgh_1 + W_{n1} + p_1\, \Delta V = \frac{\Delta m\, v_2^2}{2} + \Delta mgh_2 + W_{n2} + p_2\, \Delta V}$$

Predpostavimo, da sta notranji energiji na obeh koncih cevi enaki in delimo desno in levo stran enačbe z ΔV:

$$\frac{\rho\, v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho\, v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2$$

Tu je:

$\frac{\rho\, v^2}{2}$	gostota kinetične energije
$\rho\, g\, h$	gostota potencialne energije

Enačbo še poenostavimo tako, da smatramo, da cev ni nagnjena. Potencialni energiji sta na obeh straneh enaki. Dobimo Bernoullijevo enačbo v znani obliki:

$$\boxed{\frac{\rho\, v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho\, v_2^2}{2} + p_2}$$

Vsota gostote kinetične energije in tlaka sta na obeh koncih cevi enaka. Kjer je večja hitrost tekočine (pa tudi plina) je manjši tlak.

5 PRIMER UPORABE BERNOULLIJEVE ENAČBE

Zakonitosti, ki nam ji da Bernoullijeva enačba lahko uporabimo pri gibanju tekočin in plina. Številne fizikalne pojave lahko razložimo s pomočjo Bernoullijeve enačbe. Primer sta ladji, ki plujeta vzporedno. Zaradi podtlaka med ladjama lahko ladji, ki sta preblizu trčita druga ob drugo. Opazujmo npr. kabino za tuširanje s plastičnimi zavesami. Zaradi toka vode iz tuša se ustvari v kabini podtlak, plastični zavesi se lahko nalepita na osebo pod tušem.

Tudi mnoge tehnične naprave in instrumenti delujejo po Bernoullijevi enačbi. Primer je pištola za brizganje barvil (podtlak zaradi zračnega toka sesa barvo iz rezervoarja in jo brizga na predmet).

Znana je tudi Venturijeva cev, kjer merimo hitrosti vodnega ali zračnega toka z meritvijo tlačne razlike med cevjo in odsekom zoženega dela cevi ter upoštevamo stacionarnost toka $S_1 v_1 = S_2 v_2$.

Iz Bernoullijeve enačbe lahko izpeljemo tudi kvadratni zakon upora. To je upor, ki ga povzroča vodni ali zračni tok na oviro. Lahko je tudi upor mirujočega zraka ali vode na gibajoči predmet.

Primer:

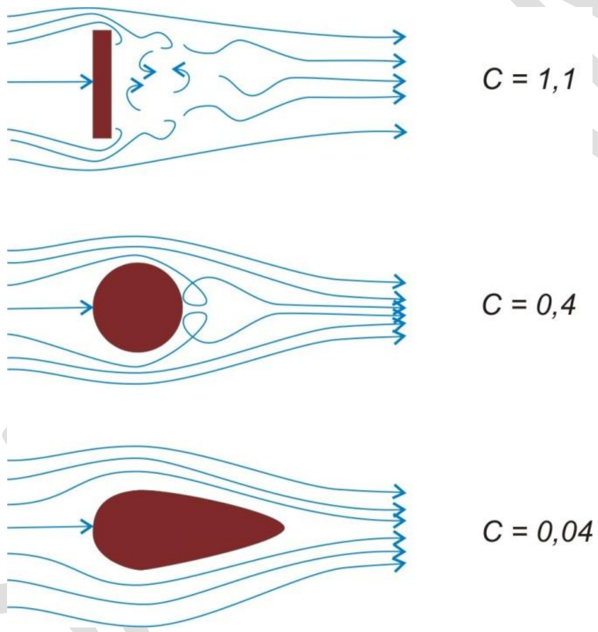
Izračunamo, kakšna sila deluje voda na nosilec mostu, ki stoji v deroči vodi.

Zamislimo si, da je profil nosilca v smeri toka kvader s površino $4\ m^2$. S kakšno silo deluje voda na nosilec, če je hitrost vode $3\ \frac{m}{s}$?

$S = 4\ m^2$

$v = 3\ \frac{m}{s}$

$F_u = ?$



Slika 5 Tri vrste ovir na poti vodnega toka. Koeficient upora c_u je odvisen od oblike telesa.

Na sliki 5 vidimo, da obstaja vsaj eno točka na oviri, ki jo curek zadane in se voda na njej ustavi. V tej točki je v_2 enaka nič.

Po Bernoullijevi enačbi določimo tlak ob oviri za tokovnico, kjer se voda ob oviri ustavi glede na tlak vode v okolici. Imenujemo ga zastojni tlak.

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2} = 0 - \frac{\rho v_1^2}{2}$$

$$p_2 - p_1 = \Delta p \ = \frac{\rho\, v_1^2}{2}$$

Zastojni tlak deluje s silo na nosilec, ki je enaka:

$$F_u = \Delta p\, S = \frac{\rho\, S\, v_1^2}{2}$$

V enačbi smo predpostavili, da deluje zastojni tlak na celotno ploskev, ki prestavlja upor vodi. Iz slike 5 vidimo, da to ni tako. Zato korigiramo enačbo z koeficientom upora, ki je na sliki 5 podan za tri vrste ovir: plošča, kroglo in idealno hidrodinamično (ali aerodinamično) obliko. Dobili smo enačbo za kvadratni zakon upora:

$$F_u = c_u \frac{\rho\, S\, v_1^2}{2}$$

Vstavimo podatke ($c_u = 1{,}1$; $\rho = \frac{1000\, kg}{m^3}$) in dobimo:

$$\underline{F_u = 19\,800\, N = 18{,}8\, kN}$$

Za drugo oblike ovire v vodi bi bila sila upora sorazmerna koeficientu c_u.

6 ZAKLJUČEK

Hidrodinamične lastnosti snovi v tekočinah ali plinih lahko izpeljemo s pomočjo splošne energetske enačbe. Pri tem predpostavimo, da je sistem toplotno in mehansko izoliran od okolice. Ker ni zunanjega vpliva lahko samo delo tlaka spreminja polno energijo sistema. Vsota polne energije in dela tlak je konstantna. Iz omenjenega zakona lahko izpeljemo Bernoullijevo enačbo. Pri tem predpostavimo, da je viskoznost tekočine enaka nič.

V nadaljevanju prikažemo nekaj praktičnih primerov in fizikalnih pojavov, ki jih lahko razložimo z Bernoullijevo enačbo.

Poseben primer uporabe Bernoullijeve enačbe je kvadratni zakon upora. Upor, ki ga prestavlja telo toku je proporcionalen kvadratu hitrosti (telesa ali toka), površini, ki jo nastavlja toku, gostoti toka in koeficientu upora, ki je odvisen od oblike telesa.

7 BIBLIOGRAFIJA

Hribar, M., Kocijančič, S., Likar, A., Oblak, S., & Pajk, V. (2001). *Mehanika in toplota.* Ljubljana: Modrijan.

Kladnik, R. (1997). *Energija, toplota, zvok, svetlobae.* Ljubljana: DZS.

Kuščer, I., & Moljk, A. (1985). *FIZIKA MEHANIKA.* Ljubljana: DZS.

Strnad, J. (2003). *Mala fizika 1.* Ljubljana: DZS.